

Infos: ♦ Cours de mercredi remplacé par une vidéo → CO 121 jeudi matin
par les questions de cours.

♦ Séances du soir commencent ce soir!



L'infimum est le plus grand mineur : $x = \inf A$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A, a \geq x, \quad \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tq } x + \varepsilon \geq a$$

Le supremum est le plus petit majeur : $x = \sup A$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A, a \leq x \quad \& \quad \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tq } x - \varepsilon \leq a$$

si $\inf A \in A$, $\inf A = \min A$.

si $\sup A \in A$, $\sup A = \max A$

Remarque 1.18

Le fait qu'on écrit $\sup A = +\infty$ (respectivement $\inf A = -\infty$)

NE VEUT PAS DIRE QUE $\sup A$ (resp $\inf A$) existent.

Exemples 1.19 Les intervalles

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$I =]a, b[$ est borné. On a $\inf]a, b[= a$, $\sup]a, b[= b$, pas de min, pas de max.

$I =]a, +\infty[$ est minoré, pas majoré. $\inf]a, +\infty[= a$, pas de min, pas de max.

$I =]-\infty, b[$ est majoré, pas minoré. $\sup]-\infty, b[= b$, pas de min, pas de max.

$I = \mathbb{R}$ n'est ni minoré, ni majoré, pas de min, pas de max.

$I = [a, b]$ est borné, On a $\inf [a, b] = \min [a, b] = a$, $\sup [a, b] = \max [a, b] = b$.

$I = [a, +\infty[$ est minoré, pas majoré, $\inf [a, +\infty[= \min [a, +\infty[= a$.

$I =]-\infty, b]$ est majoré pas minoré. On a $\sup]-\infty, b] = \max]-\infty, b] = b$.

$I = [a, b[$ est borné. On a $\inf [a, b[= \min [a, b[= a$, $\sup [a, b[= b$, pas de max.

$I =]a, b]$ est borné. On a $\inf]a, b] = a$, $\sup]a, b] = \max]a, b] = b$, pas de min.

Proposition 1.20 Caractérisation des intervalles.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ non-vide. Alors, E est un intervalle si et seulement si $\forall a, b \in E$ tq $a \leq b$, $[a, b] \subseteq E$.

Chapitre 2 Le plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 Les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On définit le plan complexe par

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{où } i^2 = -1$$

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$, on appelle x la partie réelle de z qu'on note $\operatorname{Re}(z)$, on appelle y la partie imaginaire de z qu'on note $\operatorname{Im}(z)$.

Addition & multiplication :

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

On définit

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Définition 2.2: module et conjugué:

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

Le conjugué (complexe) de z , noté $\bar{z}$ est défini par

$$\bar{z} = x - iy.$$

Le module de z noté $|z|$ est défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Proposition 2.3

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

(i) $\bar{\bar{z}} = z$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(iii) $\overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \bar{z}_1$

(iv) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$

(v) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$ et $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

(vi) $|\bar{z}| = |z|$

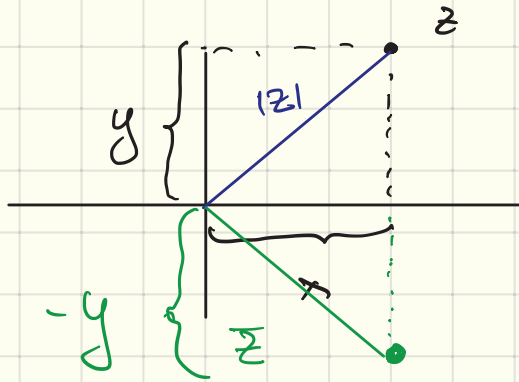
(vii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(viii) si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

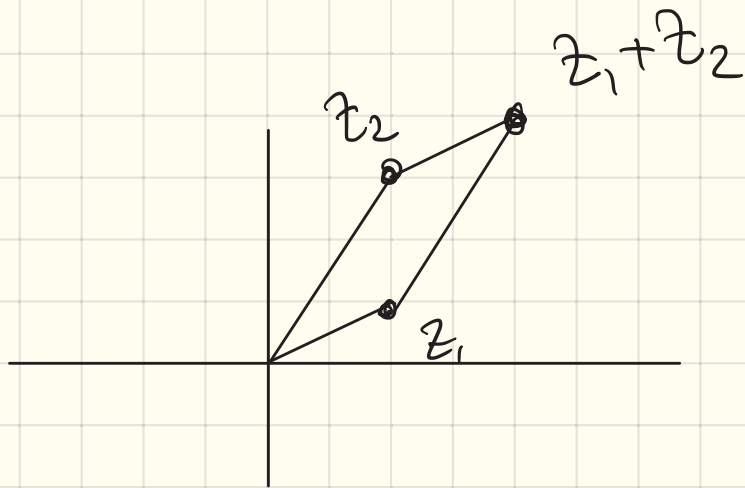
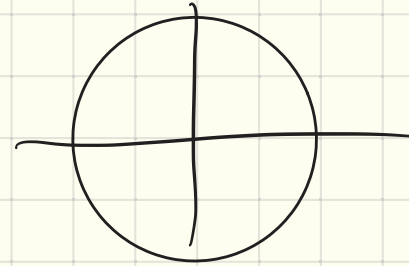
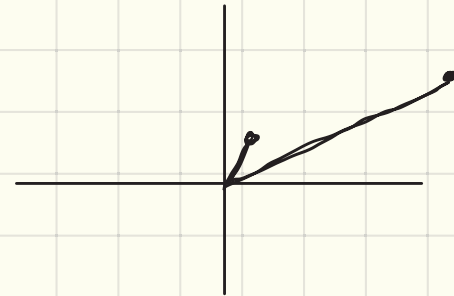
(ix) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

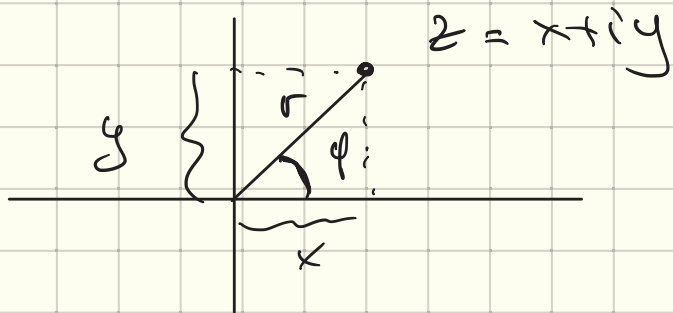
Remarque 2.4

On peut identifier $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$\bar{z}$



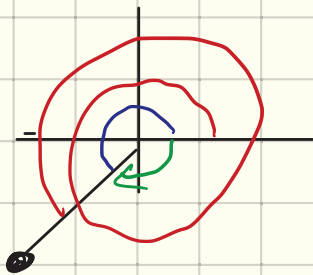


Représentation polaire

Si r et φ sont donnés,
 $z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$

Si x et y sont donnés,
 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ est une solution
 de $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$
 $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$.

⚠ pour z donné $\exists$ une infinité de φ tq $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$



$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

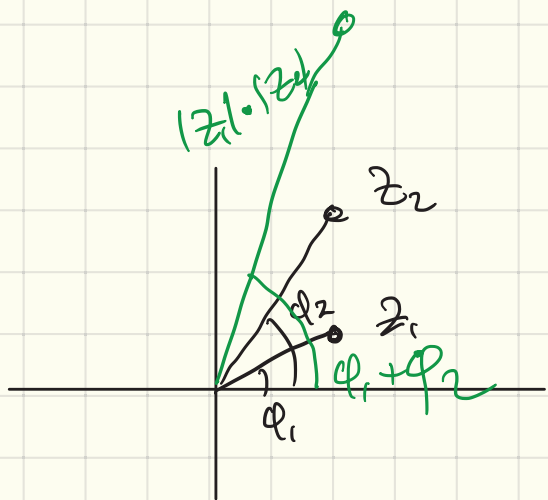
$$\varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$\varphi \in [2\pi, 4\pi]$$

Si $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

en particulier, si $k \in \mathbb{N}^*$, $z_1^k = r_1^k (\cos(k\varphi_1) + i \sin(k\varphi_1))$



Définition 2.6 (argument)

Pour $z \in \mathbb{C}$, si $\varphi \in \mathbb{R}$ est tel $z = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, on dit que φ est un argument de z et on note $\varphi = \arg(z)$

$$z = |z| (\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$$

Remarque 2.7 (i) Pour tout nombre complexe on peut trouver un argument.
(ii) $\triangle$ On écrit $\arg(z)$, malgré le fait que $\arg$ n'est pas une fonction

Définition 2.6 (argument)

Pour $z \in \mathbb{C}$, si $\varphi \in \mathbb{R}$ est tq, $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, alors, on dit que φ est un argument de z et on note $\varphi = \arg(z)$.

Remarque 2.7:

- (i) pour tout nombre complexe, un argument existe.
- (ii) ⚠ On écrit $\arg(z)$, malgré le fait que $\arg$ n'est pas une fonction bien définie.

Exemples 2.8: (i) $i = 0 + i1$



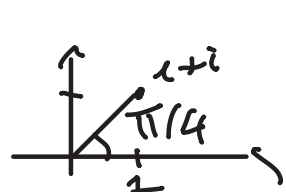
A diagram showing the complex number i on the imaginary axis of the complex plane. The horizontal axis is the real axis and the vertical axis is the imaginary axis. A point is marked on the positive imaginary axis at a distance of 1 from the origin, labeled with i . An arrow points from the origin to this point.

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

$$|i| \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 1 (0 + i \cdot 1) = i$$

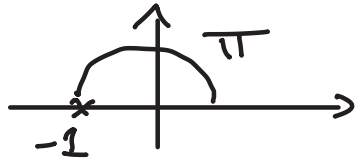
(ii) $1+i$



$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1+i$$

(iv) -1



$$|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$
$$1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Proposition 2.9 :

$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

(i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

si φ est un arg de z , alors $-\varphi$ est un arg de $\bar{z}$

(ii) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

si φ_1 est un arg de z_1 et φ_2 est un arg de z_2 , alors, $\varphi_1 + \varphi_2$ est un argument de $z_1 \cdot z_2$.

(iii) si $z \neq 0$, $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

§2.2 La fonction exponentielle, les formules d'Euler et de Moivre.

Définition 2.11 : fonction exponentielle

On définit l'exponentielle complexe $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^z$

par $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)))$

Exemples 2.12 :

$$(i) \text{ Si } x \in \mathbb{R}, \quad e^{x+i \cdot 0} = e^x (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = e^x$$

$$(ii) \quad e^i = e^{0+i \cdot 1} = e^0 (\cos(1) + i \cdot \sin(1)) = \cos(1) + i \sin(1)$$

$$(iii) \quad e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0 (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -1. \quad \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Remarque 2.13

On peut utiliser l'exponentielle pour écrire

$$z = |z| e^{i \cdot \arg(z)}$$

Théorème 2.15 : Formules d'Euler

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, \quad \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \& \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Preuve :

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors,

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2} (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) + \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Vue que $\cos$ est pair ($\cos(-x) = \cos(x)$) et $\sin$ est impair ($\sin(-x) = -\sin(x)$), on arrive à

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2} (\cos\varphi + \cancel{i\sin\varphi} + \cos\varphi - \cancel{i\sin\varphi}) = \frac{1}{2} 2\cos(\varphi) = \cos\varphi$$

et

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i} (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) - \cos(-\varphi) - i\sin(-\varphi))$$

idem
qu'au
précédent.

$$= \frac{1}{2i} (\cancel{\cos(\varphi)} + i\sin(\varphi) - \cancel{\cos(\varphi)} + i\sin(\varphi)) = \frac{1}{2i} \cdot 2i\sin(\varphi) = \sin\varphi$$

Remarque 2-16: (i) On peut utiliser ces formules pour définir
 $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(ii) Les formules d'Euler permettent de retrouver des formules trigonométriques. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2e^{ix} \cdot e^{-ix} + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i \cdot 2x} + e^{-i \cdot 2x} + 2) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{e^{i \cdot 2x} + e^{-i \cdot 2x}}{2}}_{\cos(2x)} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}.$$

Proposition 2.14 (oubliée. ::)

$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$, on a

(i) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$

(ii) $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$

(iii) $e^{z+2n\pi i} = e^z$.

(iv) si $e^{z_1} = e^{z_2}$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

(v) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

(vi) $(e^z)^n = e^{n \cdot z}$

(vii) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$